SESIÓN 13

DERIVACIÓN DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS (2ª PARTE)

I. CONTENIDOS:

1. Ejercicios resueltos aplicando exponentes y logaritmos (2ª. Parte)
2. Derivación de funciones exponenciales y logarítmicas
3. Ejercicios resueltos de derivación de funciones exponenciales y logarítmicas
4. Estrategias centradas en el Aprendizaje: Ejercicios propuestos de derivación de funciones exponenciales y logarítmicas

II. OBJETIVOS:

Al término de la Clase, el alumno:

- Comprenderá como se resuelven problemas que involucran exponentes y logaritmos
- Derivará funciones exponenciales y logarítmicas

III. PROBLEMATIZACIÓN:

Comenta las preguntas con tu Asesor y selecciona las ideas más significativas.

- ¿Cómo se resuelve una ecuación logarítmica?
- ¿Cómo se resuelve una ecuación exponencial?
- ¿Cuál es la relación entre ambos tipos de ecuaciones?

IV. TEXTO INFORMATIVO-FORMATIVO:

1.1. Ejercicios resueltos aplicando exponentes y logaritmos (2. Parte)

Es recomendable que el estudiante adquiera la destreza en el uso de la calculadora científica ya que resulta indispensable en el cálculo de exponentes y logaritmos, consulte a su asesor para que le recomiende la más adecuada para este fin.

Ecuaciones logarítmicas:

Resuelva la ecuación logarítmica: $\log_4 x = \log_4(8-x)$
Solución:

$\log_4 x = \log_4(8-x)$	Ecuación dada
$x = 8 - x$	Justificación: las funciones logarítmicas son biunívocas
$2x = 8$	Transponiendo términos y simplificando
$x = 4$	Despejando la incognita

Comprobación: Se debe verificar que los logaritmos, ***son solo números reales y positivos.***

$\log_4 4 = \log_4(8-4)$ $\therefore$ $\log_4 4 = \log_4 4$ Esto es una afirmación correcta, siendo $x = 4$ una solución a la ecuación dada

Resuelva la ecuación logarítmica: $\log_4(5+x) = 3$
Solución:

$\log_4(5+x) = 3$	Ecuación dada
$5 + x = 4^3$	Por definición de logarítmo
$x = 59$	Despejando la incognita

Comprobación: $\log_4(5+59) = \log_4 64 = \log_4 4^3$ primer miembro de la ecuación (recuerde que el exponente es igual al logaritmo), el segundo miembro de la ecuación es 3, como 3=3 es una afirmación correcta, $x = 59$ es una solución.

Resuelva la ecuación logarítmica:

$\ln x^2 = -2$	Ecuación dada
$x^2 = e^{-2}$	Pasando a la forma exponencial
$x^2 = \frac{1}{e^2}$	Transformando el exponente negativo a su equivalente positivo
$x^2 = 0.135335$	Por cálculo aritmético
$\ln 0.135335 = -2$	Comprobación

En la siguiente ecuación despeje el valor de t : $T = 75e^{-2t}$
Solución:

$T = 75e^{-2t}$	Ecuación dada
$e^{-2t} = \frac{T}{75}$	Despejando la expresión exponencial
$-2t = \ln\frac{T}{75}$	Se pasa a la forma logarítmica equivalente
$t = -\frac{1}{2}\ln\frac{T}{75}$	Se despeja t

Resolver la ecuación: $\ln(x+6) - \ln 10 = \ln(x-1) - \ln 2$
Solución

$\ln(x+6) - \ln(x-1) = \ln 10 - \ln 2$	Reacomodando términos
$\ln\left(\frac{x+6}{x-1}\right) = \ln\left(\frac{10}{2}\right)$	Aplicando la ley (2) de los logarítmos
$\frac{x+6}{x-1} = 5$	$\ln x$ es biunívoco
$x + 6 = 5x - 5$	Quitando el denominador
$x = \frac{11}{4}$	Despejando x

Comprobación: Como $\ln(x+6)$ y $\ln(x-1)$ están definidos si $x = \frac{11}{4}$, por ser logarítmos de números reales y positivos y como los pasos algebraicos son correctos entonces esta es una solución de la ecuación dada.

La siguiente ecuación se emplea en ciertos cálculos de física de partículas:
$N(t) = 2000e^{ct}$
Si el valor de $N(t) = 1500$ y el de $t = 10$, en ciertas condiciones, despeje el valor de c.

Solución:
$1500 = 2000e^{10c}$ Sustituyendo el valor asignado a $N(t)$ y a t

$\frac{3}{4} = e^{10c}$ Dividiendo entre 2000 y simplificando

$10c = \ln\frac{3}{4}$ Pasando a la forma logarítmica equivalente

$c = \frac{1}{10}\ln\frac{3}{4}$ Despejando el valor de c

Relación entre el logaritmo natural (base e) y el logarítmo común.

$\ln N = \frac{\log N}{\log e}$ “El logarítmo natural de un número cualquiera se obtiene al dividir su logarítmo común entre el logarítmo de e "

Si de la ecuación anterior despejamos $\log N$ resulta:

$\log N = \ln N \log e$ “El logarìtmo común de un número cualquiera se obtiene al multiplicar su logarítmo natural por el logarítmo e “

2.1. Derivación de funciones logarítmicas y exponenciales

Fórmulas fundamentales para la derivación de funciones logarítmicas y exponenciales

1. $\frac{d}{dx}(\ln v) = \frac{1}{v} \cdot \frac{dv}{dx}$ “La derivada del logaritmo natural de una función es igual a la derivada de la función multiplicada por el recíproco de la función “

2. Si en la fórmula anterior $v = x$ esta se simplifica, de tal manera que queda:

$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$

3. $\frac{d}{dx}(\log v) = \frac{\log e}{v} \cdot \frac{dv}{dx}$ “La derivada del logaritmo común de una función es igual al logaritmo e dividido entre la función y multiplicada por la derivada de la función “

4. Si en la fórmula anterior $v = x$ esta se simplifica, de tal manera que queda:

$\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{\log e}{x}$

5. $\frac{d}{dx}(a^v) = a^v \ln a \cdot \frac{dv}{dx}$ “ La derivada de una constante elevada a un exponente variable es igual al producto de la constante elevada al exponente variable por el logarítmo natural de la constante y por la derivada del exponente “

6. Si en la fórmula anterior $v = x$ esta se simplifica y toma la forma:

$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$

7. Si en la fórmula anterior $a = e$ y como $\ln e = 1$ si sustituimos en la fórmula anterior queda:

$\frac{d}{dx}(e^v) = e^v \frac{dv}{dx}$ “ la derivada del número e elevada a un exponente variable es igual al producto del número e elevado al exponente variable por la derivada del exponente “

8. En el caso de que $v = x$ la fórmula anterior se simplifica y obtenemos:

$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

9. Fórmula fundamental para la derivación de la función exponencial general.

$\frac{d}{dx}(u^v) = vu^{v-1} \cdot \frac{du}{dx} + u^v \ln u \cdot \frac{dv}{dx}$ " La derivada de una función con exponente variable es igual al exponente por la función elevada al exponente variable menos uno por la derivada de la función, más la función elevada al exponente por el logaritmo natural de la función por la derivada de la función "

10. En el caso especial que $v = n$, es decir que el exponente sea constante, la fórmula anterior se simplifica, quedando:

$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$

3.1. Ejercicios resueltos de derivación de funciones logarítmicas y exponenciales

1.- Derive la siguiente función: $y = \ln(1 + x^2)$

Solución

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\ln(1 + x^2)$

Solución

$\frac{d}{dx}\ln(1 + x^2) = \frac{1}{(1+x^2)} \cdot \frac{d}{dx}(1 + x^2)$ Aplicando la fórmula número uno

$= \frac{1}{(1+x^2)}(2x^{2-1})$ Derivando la función

$= \frac{2x}{1+x^2}$ Que es la derivada buscada

Derivar la función: $y = \ln(x + 3)^2$

Solución: $y = 2\ln(x + 3)$ Por propiedad de los logarítmos

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\ 2\ln(x + 3)$ Indicando la derivada de la función

$\frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{1}{x+3}\right) \cdot \frac{d}{dx}(x + 3)$ Aplicando la fórmula uno

$= \frac{2}{x+3}$ Que es la derivada buscada

Derivar la función: $y = Ln^2(x + 3)$

Solución:

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}Ln^2(x + 3) = 2\ln(x + 3)\ \cdot \frac{d}{dx}[\ln(x + 3)] = 2\ln(x + 3) \cdot \left(\frac{1}{x+3}\right) \cdot \frac{d}{dx}(x + 3)$

$= \frac{2\ln(x+3)}{x+3}$ Que es la derivada buscada

Observación: $Ln^2(x+3) = \ln(x+3)^2$

Derivar la función: $y = \ln(x^3+2)\,(x^2+3)$

Solución:

$y = \ln(x^3+2) + \ln(x^2+3)$ Por propiedad de los logarítmos

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^3+2}\right) \cdot \frac{d}{dx}(x^3+2) + \left(\frac{1}{x^2+3}\right) \cdot \frac{d}{dx}(x^2+3)$

$= \frac{3x^2}{x^3+2} + \frac{2x}{x^2+3}$ Que es la derivada buscada

Derivar la función: $y = \log \frac{2x}{1+x^2}$

Solución:

$y = \log 2x - \log(1+x^2)$ Por propiedad de los logarítmos

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{\log e}{2x} \cdot \frac{d}{dx}(2x) - \frac{\log e}{1+x^2} \cdot \frac{d}{dx}(1+x^2)$ Aplicando la fórmula tres

$= \log e\left(\frac{1}{x} - \frac{2x}{1+x^2}\right) = \log e \frac{1-x^2}{x(1+x^2)}$ Que es la derivada buscada

4.1. ESTRATEGIAS CENTRADAS EN EL APRENDIZAJE: Ejercicios propuestos de derivación de funciones logarítmicas y exponenciales.

Derivar las siguientes funciones

a) $y = \ln(ax+b)$ c) y= $(ax+b)^2$ e) $y = \ln x^3$ g) $y = \log\frac{2}{x}$ i) $y = \ln\sqrt{9-2x^2}$

b) $y = \ln(ax^2+b)$ d) $y = \ln ax^n$ f) y= $Ln^3 x$ h) $y = \ln\frac{x^2}{1+x^2}$ j) $y = x\ln x - x$

k) $y = \frac{\ln x^2}{x^2}$ l) $y = x\log(1-x)$ m) $y = \ln x^x$ n) $y = \sqrt{\ln x}$ o) $y = \sqrt{x}\cdot\ln x$